Ipotesi sulla geometria dell'universo multidimensionale

Fabio Nicolini

Abstract. La cosmologia multidimensionale utilizza una geometria del tipo $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+e^{2\phi(x)}h_{mn}dy^m dy^n$. Tale posizione non discende da principi primi: piuttosto va considerata come una generalizzazione della metrica di Friedmann. Del resto, le cosmologie ispirate ai modelli di unificazione spesso non ammettono geometrie di questo genere senza perdere di stabilità. Nel presente lavoro viene ricavata una diversa metrica a partire dall'ipotesi che lo spazio-tempo ordinario può essere localmente riguardato come una ipersuperficie pseudo-Riemanniana isometricamente immersa in M_n. Inoltre si dimostra che tale geometria è in grado di risolvere, in modo semplice, il modello non lineare di Einstein-Gauss-Bonnet. Infine si evidenzia come questa possa contribuire alla costruzione del principio cosmologico esteso necessario per comprendere la natura di un universo multidimensionale.

Introduzione. I modelli cosmologici sono ricavati dalle equazioni di Einstein attraverso le ipotesi geometriche contenute nel Principio Cosmologico[1]. Al contrario, i modelli cosmologici multidimensionali, tipicamente ispirati alle teorie di unificazione, sono ricavati dalle equazioni di Einstein estese ad uno spazio- tempo multidimensionale dopo aver utilizzato una generalizzazione della metrica di Friedmann[2÷12]: questa, assumendo una forma diagonale a blocchi, attribuisce allo spazio interno un fattore di scala dipendente dalle coordinate esterne.

In realtà non esistono robusti fondamenti geometrici né tantomeno un principio cosmologico esteso che permettano di sostenere questo ansatz sulla metrica: ovviamente tale posizione troverebbe a posteriori una giustificazione qualora fosse in grado di generare le volute soluzioni cosmologiche.

Nei modelli lineari, del resto, esistono soluzioni di tipo Kasner[13,15] capaci di anisotropizzare per evoluzione cosmologica lo spazio multidimensionale confinando a distanze dell'ordine della lunghezza di Planck lo spazio interno. Tali soluzioni possono essere rese, con contributi di materia, definitivamente stabili[3,4,7,14,15,17].

Sfortunatamente ciò non sembra possibile se la lagrangiana gravitazionale contiene il termine non lineare di Gauss-Bonnet[12]: d'altra parte tale termine è presente nelle promettenti teorie di unificazione ricavate dal modello eterotico delle supercorde[18,19,21,31,36].

Vale la pena ricordare che la generalizzazione della metrica di Friedmann risulta storicamente legata alle teorie di unificazione alla Kaluza-Klein[22÷28]: in queste, gli elementi fuori dalla diagonale del tensore metrico multidimensionale generano, attraverso le isometrie dello spazio interno, i voluti campi di gauge non abeliani. In questo modo, la metrica multidimensionale risulta diagonale a blocchi nel caso in cui si considerino modelli di vuoto ovvero si sostituiscano ai potenziali di gauge il loro valore aspettato nel vuoto. Ciò permette di riguardare lo spazio-tempo multidimensionale come prodotto diretto di due sottospazi e dunque utilizzare coerentemente la generalizzazione della metrica di Friedmann. Tale approccio all'unificazione risulta valido nelle teorie di supergravità[23,27,28,29] dove appunto è il tensore metrico multidimensionale che genera i campi di gauge[16,29]; al contrario, nelle cosmologie decadimensionali non lineari tipicamente ispirate al modello eterotico delle supercorde, i campi di gauge sono automaticamente presenti essendo questi ultimi, al pari del gravitone, altri stati bosonici privi di massa della supercorda eterotica[18,28,30,31,36] in dieci dimensioni. Dunque, in questo caso, non risulta ben chiaro come e con quali ipotesi si possa sostenere l'idea di un universo decadimensionale dato dal prodotto diretto di due sottospazi.

Il presente lavoro è dedicato alla ricerca delle ipotesi geometriche relative ad un universo presumibilmente multidimensionale nel tentativo di formulare un principio cosmologico esteso. Questo risulta così organizzato: nella prossima parte la forma della metrica multidimensionale, anziché assunta, viene ricavata; ampio spazio è poi dedicato al confronto tra questa e la metrica di Friedmann generalizzata. Nella successiva parte si utilizza tale metrica per risolvere il modello non lineare di Einstein-Gauss-Bonnet. Nell'ultima parte, infine, si utilizza induttivamente la geometria di immersione per tentare di formulare un principio cosmologico esteso che, pur contenendo il Principio Cosmologico tradizionale, sia consistente con l'ipotesi relativa alla multidimensionalità dell'universo.

La geometria. Sia S_4 lo spazio-tempo ordinario e $g_{\mu\nu}$ la sua metrica: se l'universo ha una struttura geometrica multidimensionale, potremo localmente considerare S_4 come una ipersuperficie isometricamente immersa in uno spazio-tempo di Minkowski ad n dimensioni. La scelta di M_n è dovuta essenzialmente al fatto che l'immersione in uno spazio-tempo piatto risulta piuttosto semplice[32]; inoltre i modelli di unificazione a cui ci riferiamo assumono M_n come stato fondamentale[28]. Come vedremo in seguito, tale scelta non fornisce risultati banali ma, al contrario, permette di generalizzare il concetto di spazio tangente ad S_4.

L'immersione è dunque realizzata quando un punto di S_4, di coordinate x^λ $(..,\lambda,..=0,..,3)$, può essere descritto in M_n da un set di coordinate cartesiane $U^L(x)$ $(..,L,..=0,..,n\text{-}1)$. La condizione di isometria assume dunque la forma:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{MN}U^M{}_{,\mu}U^N{}_{,\nu} \tag{1}$$

dove η_{MN} è la metrica di M_n; i vettori $U_{,\lambda}$ del piano tangente a S_4 agiscono evidentemente come vierbeins generalizzati[33].

Teoremi generali sull'immersione locale di S_4 in M_n stabiliscono delle relazioni tra le proprietà delle funzioni $U^L(x)$ e le dimensioni di M_n[32]. In particolare, se le dimensioni di M_n sono dieci, le funzioni $U^L(x)$ esistono e risultano analitiche[32,34]. Dunque l'immersione per il modello eterotico decadimensionale garantisce delle proprietà molto forti per le funzioni $U^L(x)$.

Nelle vicinanze del punto di immersione $x^\lambda\in S_4$, costruiamo quindi $n\text{-}4$ vettori $N_m(x)$ $(..,m,..=4,..,n\text{-}1)$, di coordinate cartesiane $N_m{}^L$, ortogonali tra di loro e ad S_4. Varranno dunque le seguenti relazioni:

$$\eta_{LM}N_m{}^LN_n{}^M=g_{mn}\ ;\quad \eta_{LM}N_p{}^LU^M{}_{,\mu}=0 \tag{2}$$

dove g_{mn} rappresenta localmente la metrica dello spazio interno.

Prendiamo ora in considerazione un punto z^L di M_n, non necessariamente appartenente ad S_4: le sue coordinate di immersione possono essere espresse da

$$z^L=U^L(x)+y^mN_m{}^L(x) \tag{3}$$

Gli $n\text{-}4$ parametri y^m così introdotti sono tali che la precedente espressione rappresenta in M_n la relazione locale che permette di passare dal sistema di coordinate $\{z^L\}$ al sistema $\{x^\lambda,y^l\}$ nel quale S_4 è definito attraverso la condizione $y^l=0$. Di seguito considereremo le y^l come coordinate periodiche.

Siamo ora nella condizione di scrivere la metrica multidimensionale[34]: dall'espressione $ds_{(n)}{}^2=\eta_{MN}dz^Mdz^N$ otteniamo, con l'ausilio delle (1), (2) e (3),

$$\begin{aligned}ds_{(n)}{}^2=&g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+g_{mn}dy^mdy^n+2\eta_{LM}\cdot\\&\cdot[N_m{}^Ldy^m+(U^L+\tfrac{1}{2}y^mN_m{}^L)_{,\mu}dx^\mu]y^nN_n{}^M{}_{,\nu}dx^\nu\end{aligned} \tag{4}$$

L'espressione appena ricavata può essere ulteriormente semplificata focalizzando l'attenzione su di uno spazio interno non dipendente dalle coordinate esterne se non attraverso un fattore di scala: assumendo dunque

$$N_m{}^L(x)=e^{\phi(x)}Q_m{}^L \tag{5}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}ds_{(n)}{}^2=&g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+e^{2\phi}h_{mn}dy^mdy^n+\\&+e^{2\phi}h_{mn}[y^m\phi_{,\mu}dx^\mu+2dy^m]y^n\phi_{,\nu}dx^\nu\end{aligned} \tag{6}$$

dove $h_{mn}=Q_m{}^MQ_n{}^N\eta_{MN}$ rappresenta il tensore metrico covariante dello spazio interno indipendente dalle coordinate x^λ del punto di immersione. Introducendo ora le coordinate di scala $Y^l=e^\phi y^l$ risulta possibile riscrivere la (6) nella forma più compatta

$$ds_{(n)}{}^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+h_{mn}dY^mdY^n \tag{6'}$$

L'ipotesi (5) permette di avvicinarsi consistentemente alla posizione geometrica contenuta nella citata generalizzazione della metrica di Friedmann e questo ci consente di fare un immediato confronto: detti $g^{(im.)}{}_{MN}$ e $g^{(Fr.)}{}_{MN}$, rispettivamente, il tensore metrico di immersione multidimensionale definito attraverso la (6) e la metrica di Friedmann, si ottiene

$$g^{(im.)}{}_{MN}=g^{(Fr.)}{}_{MN}+e^{2\phi}g'_{MN} \tag{7}$$

dove i blocchi di g'_{MN} sono dati da

$$g'_{\mu\nu}=h_{mn}y^my^n\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\ ;\quad g'_{m\mu}=h_{mn}y^n\phi_{,\mu}\ ;\quad g'_{mn}=0\ . \tag{8}$$

Dunque, le due metriche differiscono per i termini in (8) i quali dipendono esplicitamente dalle coordinate interne e dalle derivate prime del campo di scala dello spazio interno. Ciò significa che la metrica di Friedmann equivale alla metrica di immersione solo per un osservatore posto in S_4 o, in generale, quando la scala dello spazio interno risulta costante. In ogni caso, non la geometria multidimensionale ma soltanto la geometria osservabile sulla ipersuperficie S_4 risulta esattamente del tipo Friedmann.

Dal principio variazionale $\delta\int ds_{(n)}=0$ ricaviamo ora le equazioni delle geodetiche relative alla metrica (6). Queste assumono la forma:

$$(du^\lambda/ds_{(n)})+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu+\tfrac{1}{2}\phi^{,\lambda}h_{mn,r}y^rV^mV^n=0 \tag{9}$$

$$(dV^l/ds_{(n)})+\Gamma^l{}_{mn}V^mV^n-\phi_{,\mu}h^{lp}h_{pm,n}y^nu^\mu V^m=0 \tag{9'}$$

dove $u^\lambda=dx^\lambda/ds_{(n)}$, $V^l=dY^l/ds_{(n)}$ e i $\Gamma^L{}_{MN}$ sono le usuali connessioni affini. Utilizzando la metrica di Friedmann generalizzata, invece, si ottengono le equazioni[11]

$$(du^\lambda/ds_{(n)})+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu-e^{2\phi}\phi^{,\lambda}h_{mn}v^mv^n=0 \tag{10}$$

$$(dv^l/ds_{(n)})+\Gamma^l{}_{mn}v^mv^n+2\phi_{,\mu}u^\mu v^l=0 \tag{10'}$$

dove $v^l=dy^l/ds_{(n)}$.

Confrontando le espressioni (9) e (9') con le (10) e (10') segue che queste differiscono, al primo ordine in y, per un termine proporzionale a $2h_{mn}+h_{mn,r}y^r$. Tale termine non è altro che la derivata di Lie di h_{mn} rispetto ad una trasformazione di scala del tipo $y^m \rightarrow e^\varepsilon y^m$: quest'ultima non è un'isometria per lo spazio interno sicché il precedente termine non può essere nullo.

L'aspetto più delicato di questa formulazione consiste nella scelta di h_{mn}. Se si considera, per esempio, uno spazio interno piatto, allora le equazioni (9) e (9') non risultano più influenzate dal comportamento del campo di scala dello spazio interno: ciò significa che, qualsiasi modello multidimensionale venga considerato, le equazioni dei campi si riconducono banalmente a quelle relative al caso quadridimensionale classico e dunque si perde ogni speranza di seguire l'evoluzione dinamica del settore extradimensionale dell'universo. D'altra parte, il modello di unificazione al quale questo lavoro è ispirato prevede che lo spazio interno sia uno spazio di Kalabi-Yau[28,30,35] per il quale $h^{mn}R_{manb}=0$ ma $R_{manb}\neq 0$; facendo questa scelta le equazioni (9) e (9') non generano modelli banali: questo permette alle equazioni del campo g_{MN} di descrivere, oltre alla dinamica di $g_{\mu\nu}$, anche quella relativa al campo ϕ.

Prima di concludere mostriamo le componenti del tensore di Riemann; utilizzando le (9) e (9') si ottiene:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{(4)\alpha\beta\gamma\delta}\ ;\ R_{abcd}=R_{(D)abcd}\ ;\ R_{\alpha\beta ab}=0\ ;$$
$$R_{\mu abc}=\tfrac{1}{2}\phi_{,\mu}h_{a[c,b]}\ ;\ R_{m\alpha\beta\gamma}=0\ ;\ R_{\alpha a\beta b}=O_{\alpha a\beta b}(y\times\nabla\phi)$$

dove $D=n-4$ e le ultime componenti dipendono esplicitamente dalle coordinate interne.

Il modello. Consideriamo la densità di lagrangiana:

$$L = -R+\psi^{-1}(F_{AB}F^{AB}-L^{(G.B.)})+2\psi^{-2}(\psi_{,M}\psi^{,M}) \tag{11}$$

In questa, tutte le grandezze sono definite in uno spazio-tempo decadimensionale: R è lo scalare di curvatura, ψ il dilatone e $L^{(G.B.)}=R^2-4R_{AB}R^{AB}+R_{ABCD}R^{ABCD}$ il termine di Gauss-Bonnet; inoltre F_{AB} descrive il campo di gauge. Tutte le costanti sono state eliminate attraverso una opportuna ridefinizione del campo ψ e della densità L. La (11) deriva dal settore bosonico del modello eterotico delle supercorde[21,36]. Il termine quadratico di Gauss-Bonnet, presente per ragioni di supersimmetria[37,38], non introduce anomalie nel propagatore gravitazionale[19]. Inoltre esso risulta consistente con la generalizzazione al caso multidimensionale della densità di lagrangiana gravitazionale[20,39].

Modelli cosmologici di Einstein-Gauss-Bonnet sono stati considerati da diversi autori[2,8,9,11,12,38,40÷44]. Lo studio sistematico del problema[11,12] in generale non fornisce, al contrario del caso lineare[45], soluzioni stabili per il sistema e questo fatto induce a criticare la presenza del termine di Gauss-Bonnet[12]; in realtà, questi modelli introducono il campo geometrico di scala attraverso la generalizzazione della metrica di Friedmann la quale, come abbiamo più volte evidenziato, non risulta sostenuta da solidi principi. Dunque non si capisce per quale ragione non si debba dubitare dell'ansatz sulla metrica anziché del termine quadratico; quest'ultimo, al contrario, trova, nelle teorie di unificazione, valide argomentazioni in suo favore.

Per quanto ci riguarda, il presente lavoro poggia su queste congetture.

Ricaviamo dunque le equazioni dei campi dal principio variazionale $\delta\int(L+L^{(m)})(-g)^{1/2}d^{10}z=0$. In esso è stato introdotto il termine $L^{(m)}$ che tiene conto dell'eventuale presenza di un fluido di materia. Otteniamo:

$$G_{MN}=T^{(m)}{}_{MN}+2\psi^{-2}\psi_{,M}\psi_{,N}-\psi^{-2}(\psi_{,L}\psi^{,L})g_{MN}+$$
$$+\psi^{-1}(2F_{ML}F^{L}{}_{N}-\tfrac{1}{2}F^2g_{MN}+T^{(G.B.)}{}_{MN})+O_{MN}(R\times\nabla\psi) \tag{12}$$

$$\psi_{;L}{}^{L}-\psi^{-1}\psi_{,L}\psi^{,L}=\tfrac{1}{4}(L^{(G.B.)}-F^2) \tag{13}$$

$$F^{AB}{}_{;B}=0 \tag{14}$$

dove, nella (12), il termine O_{MN} contiene prodotti tra la curvatura e le derivate del dilatone ed inoltre si è posto $T^{(G.B.)}{}_{MN}=\tfrac{1}{2}g_{MN}L^{(G.B.)}-2RR_{MN}+4R_{ML}R^{L}{}_{N}+4R^{AB}R_{MANB}-2R_{MABC}R_{N}{}^{ABC}$.

Consideriamo ora, in questa semplice esposizione, il caso in cui $\psi^{-1}=\alpha=cost$[2,8,9,11,12,38,40÷43]. Inoltre, scegliamo di immergere il campo di gauge nello spazio interno utilizzando[9,35,41,44] $F_{A\alpha}=0$ e $F_{ab}F^{ab}=R_{abcd}R^{abcd}$. Introducendo nelle (12) la metrica di immersione data dalla (6) e scegliendo per il tensore energia-impulso del campo di materia l'espressione $T^{(m)}{}_{MN}=diag\{\rho,..p_e\ .,..p_i\ .\}$, si ottengono le equazioni:

$$G_{\mu\nu}=T^{(m)}{}_{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}\alpha\omega^2(\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}g_{\mu\nu}-\phi_{,\mu}\phi_{,\nu})+O_{\mu\nu}(y^2\times\nabla\phi) \tag{15}$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha\omega^2\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}+(R_4+\alpha L_4{}^{(G.B.)})=2p_i \tag{16}$$

dove $G_{\mu\nu}$, R_4, $L_4{}^{(G.B.)}$ sono, rispettivamente, il tensore di Einstein, lo scalare di curvatura e il termine di Gauss-Bonnet relativi alla metrica $g_{\mu\nu}$ di S_4. Il termine $O_{\mu\nu}$ presente nella (15) dipende esplicitamente da quantità che possono essere trascurate in un modello di bassa energia ed, in ogni caso, esso risulta esattamente nullo sulla ipersuperficie S_4.

Nelle equazioni (15) e (16) è comparso il parametro di massa $\omega^2=(h_{a[b,c]})^2$: non è possibile sperare di esplicitarne la forma dal momento che a tutt'oggi non è nota alcuna espressione esplicita per il tensore metrico di uno spazio di Kalabi-Yau. In ogni caso esso risulta diverso da zero data la proprietà di antisimmetria degli indici del tensore di Riemann. In seguito, dopo aver sviluppato in serie armonica nelle y^m tale parametro, sceglieremo di riassorbire il termine dominante di ordine zero ($\omega_0{}^2$) nella definizione del campo di scala confidando che tale posizione non altera il comportamento qualitativo del modello.

Richiediamo ora che la geometria dello spazio-tempo ordinario sia consistente con il Principio Cosmologico ed inoltre che il campo di scala sia spazialmente omogeneo:

$$ds_{(4)}{}^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=dt^2-a^2(t)ds_{(3)}{}^2 \tag{17}$$

$\phi = \phi(t)$ (17')

Nella (17) supporremo che $ds_{(3)}^2 = \Sigma dx^2$. Introducendo queste ipotesi nelle (15) e (16) si ottengono le equazioni:

$$3H^2 = \rho \tag{18}$$

$$\alpha \dot{\varphi}^2 = 3[\dot{H} + (\gamma_i + 2)H^2] - 12\alpha H^2(\dot{H} + H^2) \tag{19}$$

nelle quali si è posto $H = \dot{a}/a$ e $\varphi = \frac{1}{2}\omega_0\phi$. Ad esse va aggiunta l'equazione di conservazione ($T_0{}^{\lambda}{}_{;\lambda} = 0$):

$$\dot{\rho} + 3(\gamma_e + 1)H\rho = 6H\alpha\dot{\varphi}^2 \tag{20}$$

Nelle precedenti relazioni si è fatto esplicito riferimento alle equazioni di stato $p_i = \gamma_i\rho$ e $p_e = \gamma_e\rho$.

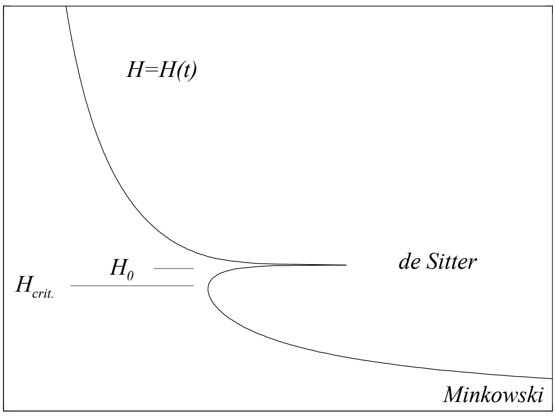
Ponendo per comodità $\gamma = (3 - \gamma_e + 2\gamma_i)/8\alpha$, l'equazione differenziale per $H(t)$ assume la forma:

$$12H[\dot{H} - 6\alpha H^2(\dot{H} + H^2 - \gamma)] = 0 \tag{21}$$

La (21) ammette, come soluzione fondamentale, lo spazio-tempo di Minkowski in modo tale che si ha: $a = a_0$, $\rho = 0$ e $\phi = \phi_0$. Inoltre la (21) prevede un'ulteriore soluzione facilmente ricavabile nella forma inversa $t = t(H)$. Tale soluzione risulta di particolare interesse cosmologico qualora si richieda, ragionevolmente, che i parametri di stato soddisfino la relazione $\gamma_e - 2\gamma_i < 5/3$. Si ha:

$$t = t_0 + \frac{1}{6\alpha\gamma H} + \gamma_0 \ln\left|\frac{\gamma^{1/2} + H}{\gamma^{1/2} - H}\right| \tag{22}$$

dove $\gamma_0 = (6\alpha\gamma - 1)/12\alpha\gamma^{3/2}$ risulta essere, per la scelta fatta sui parametri di stato, una grandezza sempre positiva. Di seguito viene riportato il grafico qualitativo della (22).



Il modello ammette dunque due distinte soluzioni asintotiche le quali controllano l'evoluzione di $H(t)$ quando è noto il suo valore iniziale H_{in}: definendo $H_{crit.} = (6\alpha)^{-1/2}$ succede che, se $H_{in} < H_{crit.}$, allora $H \rightarrow 0$ (Minkowski) mentre, se $H_{in} > H_{crit.}$, si ha $H \rightarrow H_0 = \gamma^{1/2}$ (de Sitter). Vale la pena osservare che $H_{crit.}$ non dipende dai parametri di stato. Quando $H \ll \gamma^{1/2}$, la (22) può essere immediatamente invertita ottenendo così $H \sim [6\alpha\gamma t]^{-1}$ ovvero $a \sim a_0 t^{4/3(3-\gamma_e+2\gamma_i)}$: quando lo spazio ordinario risulta dominato dalla radiazione ($\gamma_e = 1/3$) e lo spazio interno è vuoto ($\gamma_i = 0$) si ottengono le tipiche soluzioni cosmologiche $a \sim a_0 t^{1/2}$ e $\rho \sim \rho_0 t^{-2}$. Durante questa fase, il comportamento del campo di scala dello spazio interno risulta individuato dalla seguente equazione:

$$\dot{\varphi}^2 = -12\frac{\ddot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \tag{19'}$$

Il secondo membro è sempre positivo ed inoltre va a zero come t^{-4} in modo tale che $|\phi - \phi_0| \sim t^{-1}$.

Il comportamento del campo di scala durante la fase di de Sitter risulta dato da $|\phi - \phi_0| \sim e^{-t/2\gamma_0}$ se si assume, come solitamente avviene per una fase inflazionaria, $\gamma_e = -1$.

Ciò che è stato fin qui discusso va considerato come un modello di prova: nel nostro sistema abbiamo infatti assunto una configurazione strettamente costante per il dilatone ψ escludendo, in pratica, la possibilità che i due campi scalari ϕ e ψ possano raggiungere insieme la loro configurazione finale. Del resto, la parte destra della (12) rende plausibile l'ipotesi che sia il dilatone a guidare la fase inflazionaria dell'universo e questo fatto risulta ulteriormente evidente se si osserva che $H_{crit.}$ e H_0 dipendono da $\alpha = \psi^{-1}$. Lo studio della dinamica del dilatone sarà oggetto di successive ricerche. Nel presente lavoro si è voluto principalmente risolvere il modello cosmologico non lineare di Einstein-Gauss-Bonnet senza ricorrere ad alcun ansatz sulla geometria ma utilizzando la metrica di immersione: i risultati ottenuti danno sufficiente credito a tale impostazione geometrica.

Conclusioni. Nella precedente sezione si è visto in che modo la metrica di immersione data dalla (6) sia in grado di risolvere il modello cosmologico di Einstein-Gauss-Bonnet. La geometria dell'universo multidimensionale ammette una configurazione di vuoto data dal prodotto diretto $M_4 \times K_6$. Inoltre, per un osservatore posto su S_4, l'universo multidimensionale appare comunque come una struttura topologica data dal prodotto diretto di due sottospazi. Infine, in presenza di un fluido di materia, il modello genera tutte le soluzione cosmologiche contenute nella teoria quadridimensionale classica.

La geometria di immersione, data in generale dalla (4), sembra riflettere un principio cosmologico se essa risulta caratterizzata dalle ipotesi (5), (17) e (17'): nella discussione che segue cercheremo dunque di rendere plausibile la precedente asserzione.

Come è noto[1], il Principio Cosmologico afferma che l'universo è omogeneo ed isotropo e ciò rappresenta una affermazione circa l'esistenza di sistemi di coordinate equivalenti. Coerentemente con lo spirito della Relatività Generale, ciò equivale a dire che per ogni evento dello spazio-tempo passa una ipersuperficie tridimensionale definita in modo tale che densità e curvatura siano su di essa costanti ed inoltre che le linee di flusso del fluido cosmologico siano ad essa ortogonali[46]. Tale principio, non contenendo in sé alcuna negazione dell'esistenza di una struttura multidimensionale dell'universo, può essere riguardato come il principio geometrico relativo al settore attualmente osservabile dell'universo. In questo modo, l'universo ordinario deve risultare immerso in quello multidimensionale ed inoltre tale immersione deve localmente individuare una struttura geometrica interna. Le ipotesi geometriche contenute in (5), (6), (17) e (17') affermano dunque che ogni evento dello spazio-tempo ordinario individua una ipersuperficie tridimensionale di omogeneità ed isotropia immersa nello spazio-tempo multidimensionale e definita in modo tale che anche il campo di scala dello spazio interno risulta, su di essa, omogeneo. Inoltre, la struttura geometrica dello spazio interno è omogenea su ciascuna ipersuperficie e globalmente invariante su tutta la famiglia delle ipersuperfici tridimensionali che descrivono l'evoluzione dell'universo.

Bibliografia:

[1] S.Weinberg *Gravitation and Cosmology* Wiley (1972)

[2] Q.Shafi, C.Wetterich *Phys.Lett.* B 129 (1983) 387

[3] D.Sahdev *Phys.Lett.* B 137 (1984) 155

[4] D.Sahdev *Phys.Rev.* D 30 (1984) 2495

[5] R.Abbott, S.Barr, S.Ellis *Phys.Rev.* D 30 (1984) 720

[6] R.Abbott, S.Barr, S.Ellis *Phys.Rev.* D 31 (1985) 673

[7] S.Randjbar-daemi, A.Salam, J.Strathdee *Phys.Lett.* B 135 (1984) 388

[8] Q.Shafi, C.Wetterich *Phys.Lett.* 152 (1985) 51
C.Wetterich *Nucl.Phys.* B 252 (1985) 309

[9] K.Maeda *Phys.Lett.* B 166 (1986) 59

[10] K.Maeda *Phys.Lett.* B 186 (1987) 33

[11] F.Nicolini *Cosmologia multidimensionale di Gauss-Bonnet* Tesi di Laurea in Fisica inedita, Università "La Sapienza" di Roma (a.a. 1989/1990)

[12] L.Sokolowski, A.Golda, M.Litterio, L.Amendola *Int.J.Mod.Phys.* A 6 (1991) 4517

[13] A.Chodos, S.Detweiler *Phys.Rev.* D 21 (1980) 2167

[14] R.Bergamini, C.Orzalesi *Phys.Lett.* B 135 (1984) 38

[15] D.Lorentz-Petzold *Phys.Lett.* B 167 (1986) 157

[16] D.Freund, M.Rubin, *Phys.Lett.* B 97 (1980) 233

[17] P.Candelas, S.Weinberg *Nucl.Phys.* B 195 (1982) 481

[18] M.Green, J.Schwarz, E.Witten *Superstring theory I, II* Cambridge (1987)

[19] B.Zweibach *Phys.Lett.* B 156 (1985) 315

[20] B.Zumino *Phys.Rep.* 137 (1986) 109

[21] D.Gross, J.Sloan *Nucl.Phys.* B 291 (1987) 41

[22] T.Kaluza *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Phys.Math.* K 1 (1921) 966
T.Muta *English traslation of Kaluza's paper* in *An introduction to K.K. theories* World Scientific Publishing (1984)
O.Klein *Z.Phys.* 37 (1926) 895
T.Muta *English traslation of Klein's paper* in *An introduction to K.K. theories* World Scientific Publishing (1984)
A.Einstein, P.Berghmann *Ann.Math.* 39 (1938) 685

[23] Y.Cho, P.Freund *Phys.Rev.* D 12 (1975) 1711

[24] T.Appelquist, A.Chodos *Phys.Rev.* D 28 (1983) 772

[25] D.Toms *K.K. theories* in *An introduction to K.K. theories* World Scientific Publishing (1984)

[26] M.Duff *Modern K.K. theories* in *An introduction to K.K. theories* World Scientific Publishing (1984)

[27] G.Ross *Grand Unified Theories* Benjamin (1985)

[28] P.Collins, A.Martin, E.Squires *Particle Physics a Cosmology* Wiley (1989)

[29] M.Duff, B.Nilsson, C.Pope *Phys.Rep.* 130 (1986) 1

[30] M.Kaku *Introduction to Superstrings* Springer-Verlag (1988)

[31] M.Green, J.Schwarz *Phys.Lett.* B 149 (1984) 17
M.Green, J.Schwarz *Phys.Lett.* B 151 (1985) 21

[32] H.Goenner in *General Relativity and Gravitation* A.Held London (1980)

[33] L.Eisenhart *Riemannian Geometry* Princeton University Press (1966)

[34] M.Maia *Phys.Rev.* D 31 (1985) 262

[35] P.Candelas, G.Horowitz, A.Strominger, E.Witten *Nucl.Phys.* 258 (1985) 46

[36] E.Fradkin, A.Tseytlin *Phys.Lett.* B 158 (1985) 316
C.Callan, D.Friedan, E.Martinec, M.Perry *Nucl.Phys.* B 262 (1985) 593
A.Sen *Phys.Rev.* D 32 (1985)2102
A.Sen Phys.*Rev.Lett.* 55 (1985) 1846
C.Callan, I.Klebanov, M.Perry *Nucl.Phys.* B 278 (1986) 78

[37] L.Romans, N.Warner *Nucl.Phys.* B 273 (1986) 320

[38] D.Boulware, S.Deser *Phys.Rev.Lett.* 55 (1985) 2656

[39] D.Lovelock *J.Math.Phys.* 12 (1971) 798

[40] B.Altshuler *Phys.Rev.* D 35 (1987) 3804

[41] S.Kalara, C.Kounas, K.Olive *Phys.Lett.* B 215 (1988) 265

[42] W.Huang *Phys.Lett.* B 203 (1988) 105

[43] H.Ishihara *Phys.Lett.* B 179 (1986) 217

[44] N.Stewart *Class.Quantum Grav.* 8 (1991) 1701

[45] L.Sokolowski *Class.Quantum Grav.* 6 (1989) 59

[46] C.Misner, K.Thorne, J.Wheeler *Gravitation* Freeman (1973)